22/3/2016

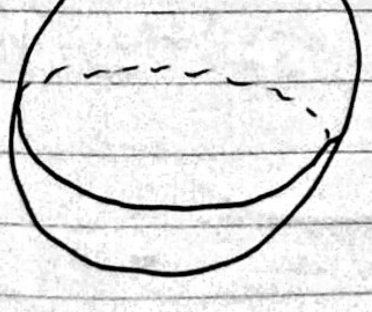
Ολικό Θεώρημα Gauss-Bonnet

Έστω R κανονική περιοχή της κανονικής προσανατολισμένης επιφάνειας S της οποίας το σύνορο ∂R είναι η ένωση των απλών, κλειστών κατά τμήματα κανονικών καμπυλών με εξωτερικές γωνίες $\theta_1, \dots, \theta_k$. Τότε ισχύει ότι

$$\iint_R K\, d\sigma + \sum_i \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \sum_j \theta_j = 2\pi \chi(R)$$

Πόρισμα 1: Για κάθε κανονική συμπαγή επιφάνεια ισχύει ότι $\iint_S K\, d\sigma = 2\pi \chi(S)$

Σχόλια:



$\chi(S^2) = 2 \Rightarrow \iint_S K\, d\sigma = 4\pi$

Εφαρμογή: Έστω S συμπαγής με καμπυλότητα Gauss $K>0$ παντού. Τότε η S είναι ομοιομορφική με την S^2

Πόρισμα: Έστω R απλή περιοχή κανονικής επιφάνειας S με $\partial R = C(I)$ και εξωτερικές γωνίες $\theta_1, \dots \theta_k$. Τότε:

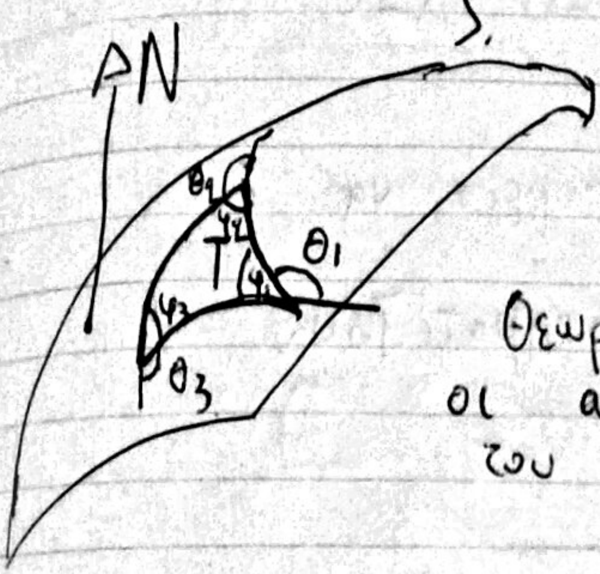
$$\iint_R K\,d\sigma + \int_{C_1} k_g(s)\,ds + \sum_i \theta_i = 2\pi$$

Απόδειξη: $X(R) = X(D)$ D: δίσκος

$F=3$
$E=6$
$V=4$

$X(D) = F - E + V = 1$

Εφαρμογή: Έστω $T \subseteq S$, τρίγωνο της S, με T γεωδαισιακό τρίγωνο



Τότε $\iint_T K\,d\sigma + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$

Θεωρούμε τις $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, που είναι οι αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες του τριγώνου T.

Έστω $\varphi_i = \pi - \theta_i$, $i = 1, 2, 3$

Τότε $\iint_T K\,d\sigma + \pi - \varphi_1 + \pi - \varphi_2 + \pi - \varphi_3 = 2\pi$

$\Rightarrow \iint_T K\,d\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi$

- Αν $K \equiv 0$. Τότε $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$
- Αν $K > 0$. Τότε $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 > \pi$
- Αν $K < 0$. Τότε $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 < \pi$

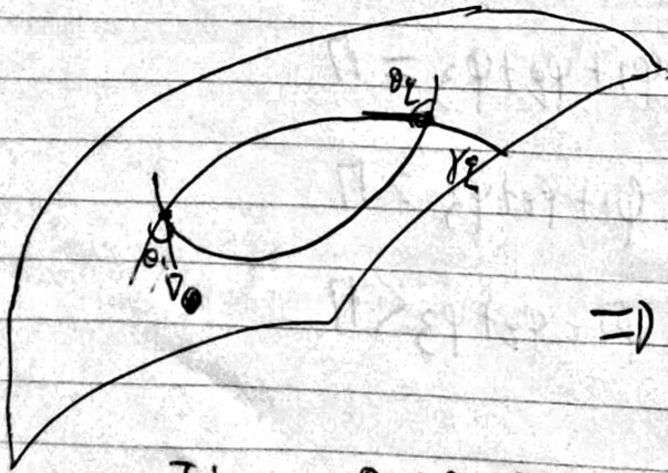
Εφαρμογή: Εστω S κανονική προσανατολισμένη επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$

(i) Δυο γεωδαισιακές δεν μπορείν να τέμνονται ώστε να ~~σχη~~ σχηματίζουν απλή περιοχή

(ii) Δεν υπάρχουν κλειστές γεωδαισιακές που να είναι το σύνορο απλών περιοχών

Απόδειξη:

(i)



$$\iint_R K\,d\sigma + \int_{\gamma_1} k_g + \int_{\gamma_2} k_g + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow \iint K\,d\sigma = 2\pi - \theta_1 - \theta_2$$

Τότε $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$. Όμως $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$

$-\pi \leq \theta_2 \leq \pi$

$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$ και $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$

$\Rightarrow \theta_1 = \pi = \theta_2$

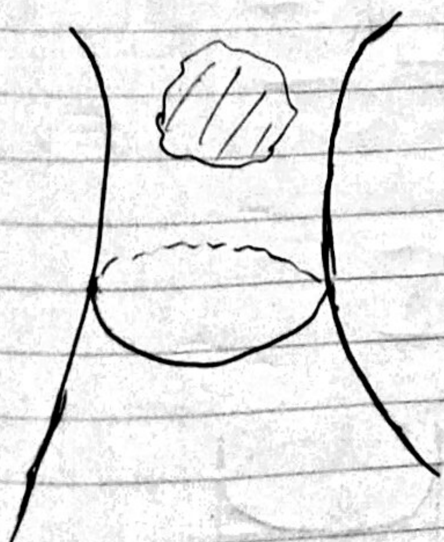
$\Rightarrow$ Οι εφαπτόμενες των γ_1 και γ_2 ταυτίζονται

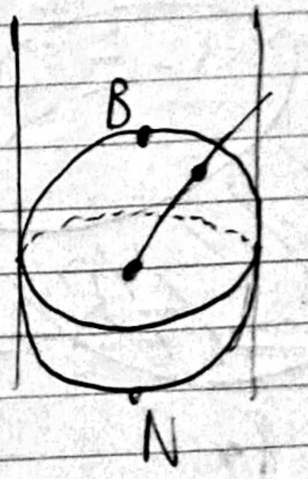
τότε $\gamma_1 \equiv \gamma_2$

(ii) $\iint_R K d\sigma + 0 + 0 = 2\pi$ (άτοπο)

Εφαρμογή: Έστω S κανονική επιφάνεια ομοιομορφική με τον κύλινδρο και $K<0$ παντού. Τότε ~~δύο~~ ~~κλειστ~~ δεν υπάρχουν δυο απλές κλειστές γεωδαισιακές

Απόδειξη:



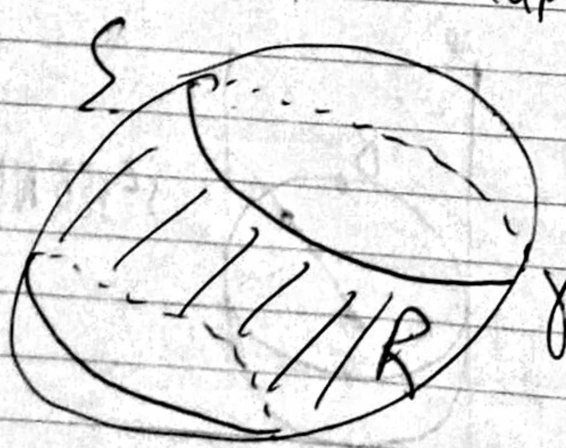


$S^2 \setminus \{B, N\} \to C$

Άρα ο κύλινδρος είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Εφαρμογή: Έστω S συμπαγής επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K>0$. Δυο απλές κλειστές γεωδαισιακές πάντα τέμνονται.

Απόδειξη: $K>0 \Rightarrow$ Η S είναι ομοιομορφική με την S^2. Έστω δυο κλειστες απλές γεωδαισιακές που ~~πάντα~~ δεν τέμνονται. Επειδή S ομοιομορφική με την S^2 τότε οι γ_1, γ_2 είναι το σύνορο κανονικής περιοχής. Απο Gauß-Bonnet: $\iint_R K d\sigma + 0 + 0 = 2\pi X(R)$



$X(R)=0$

$\iint\limits_R K\,d\sigma = 0$ (άτοπο αφού $K>0$).

Θεώρημα Jacobi:

Έστω $c: [0,L] \to S^2$ κλειστή καμπύλη. Ορίζεται το μοναδιαίο κάθετο $\bar{n}(s)$. Θεωρώ την καμπύλη $\tilde{c}: [0,L] \to S^2$ με $\tilde{c}(s) = \bar{n}(s)$

Η $\tilde{c}$ είναι κλειστή καμπύλη. Υπόθεση: Η $\tilde{c}$ είναι απλή (δεν έχει αυτοτομές). Άρα χωρίζει την S^2 σε δυο περιοχές $R, R' \xrightarrow[\text{Jacobi}]{\text{Θεώρημα}} Area(R) = Area(R') = 2\pi$

Απόδειξη: Από Θεώρημα Gauss-Bonnet για την R, $K \equiv 1$. Τότε $\iint\limits_R K\,d\sigma + \int\limits_{\tilde{c}} K_g(\bar{s})\,d\bar{s} = 2\pi$

διότι R απλή περιοχή. Άρα $Area(R) + \int\limits_{\tilde{c}} K_g(\bar{s})\,d\bar{s} = 2\pi$.

Το μήκος τόξου $\tilde{s}$ της $\tilde{c}$ είναι

$$\tilde{s} = \int_{s_0}^{s} \|\tilde{c}'(q)\| dq = \int_{s_0}^{s_0} \|\dot{\bar{n}}(s)\| dq = \int_{s_0}^{s} \|-k\bar{t} + \tau\bar{b}\|$$

$$= \int_{s_0}^{s} \sqrt{k^2 + \tau^2}$$

$$k_g(\tilde{s}) = \left\langle \frac{d^2\tilde{c}}{d\tilde{s}^2}, N \times \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{s}} \right\rangle = \left\langle \frac{d^2 n}{d\tilde{s}}, n \times \frac{d\bar{n}}{d\tilde{s}} \right\rangle$$

$$\frac{d\bar{n}}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{ds}{d\tilde{s}} \cdot \dot{n} = \frac{ds}{d\tilde{s}}\left(-k\bar{t} + \tau\bar{b}\right)$$

$$\frac{d^2 n}{d\tilde{s}} = \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\left(-k\bar{t} + \tau\bar{b}\right)\right)$$

$$= \frac{d^2 s}{d\tilde{s}^2}\dot{n} + \frac{ds}{d\tilde{s}} \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{d\bar{n}}{ds}\right)$$

$$= \frac{d^2 s}{d\tilde{s}^2}\dot{n} + \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^2 \frac{d^2\bar{n}}{ds}$$

Άρα $\displaystyle \frac{d^2 n}{d\tilde{s}} = \frac{d^2 s}{d\tilde{s}^2}\dot{n} + \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^2 \ddot{n}$

Άρα $k_g(s) = \left\langle \frac{d^2 s}{d\tilde{s}}\,\dot{\bar{n}} + \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^2 \ddot{\bar{n}},\ \bar{n} \times \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\,\dot{\bar{n}}\right) \right\rangle$

$= \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^3 \langle \ddot{\bar{n}},\ \bar{n} \times \dot{\bar{n}} \rangle$

Τότε $k_g = \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^3 \left\langle \underbrace{-\dot{k}t - k^2\bar{n} + \dot{\tau}\bar{b} - \tau^2\bar{n}}_{\ddot{\bar{n}}},\ \bar{n} \times (-k\bar{t} + \tau\bar{b}) \right\rangle$

$\Rightarrow k_g = \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)^3 (k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)$

$\left(\frac{d\tilde{s}}{ds} = \sqrt{k^2+\tau^2} \right.$

$\left. \Rightarrow \frac{ds}{d\tilde{s}} = \frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \right.$

$\Rightarrow k_g = \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{\left(\sqrt{k^2+\tau^2}\right)^3}$

$\int_{\tilde{C}} k_g(\tilde{s})\, d\tilde{s} = \int_0^L \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{\left(\sqrt{k^2+\tau^2}\right)^3} \cdot \sqrt{k^2+\tau^2}\, ds$

$= \int_0^L \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{k^2+\tau^2}\, ds = \int_0^L \arctan\left(\frac{\tau}{k}\right) ds$

$= 0$

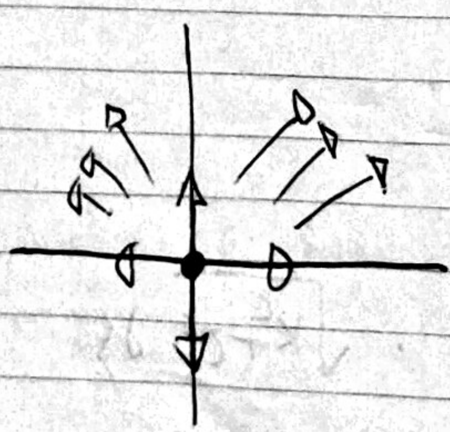
Άρα $Area(R) = 2\pi$

Αν S συμπαγής επιφάνεια με Καμπυλότητα Gauss K τότε $\iint_S K\, d\sigma = 2\pi \chi(S)$

Διανυσματικά πεδία
σε επιφάνειες

Ορισμός: Καλούμε διανυσματικό πεδίο στην S κάθε λεία απεικόνιση $V: S \to \mathbb{R}^3$ ώστε για $p \in S \Rightarrow V(p) \in T_pS$

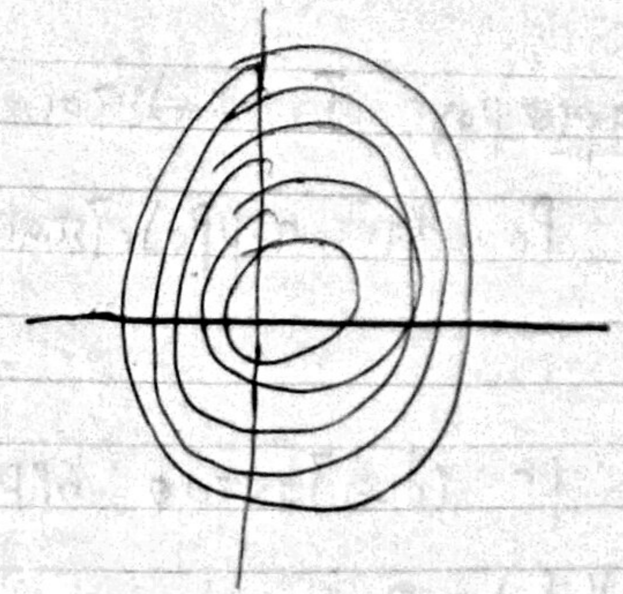
Παραδείγματα: $S = \mathbb{R}^2$



$V_1(x,y) = (x,y)$

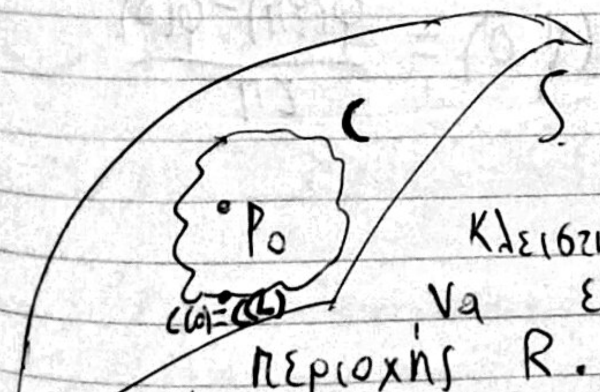
Ορισμός: Το σημείο p καλείται ιδιάζων σημείο του V αν-ν $V(p) = 0$

Αν $V_2(x,y) = (-y, x)$



Υπόθεση: Τα ιδιάζοντα σημεία των υπο μελέτη διανυσματικών πεδίων είναι μεμονωμένα.

Σε κάθε ιδιάζων σημείο θα αντιστοιχήσουμε τον δεικτη (ένα αριθμό $\in Z$)



Έστω V διανυσματικό πεδίο και P_0 ιδιάζων σημείο. Θεωρώ απλή κλειστή καμπύλη C ώστε να είναι το σύνορο μιας απλής περιοχής R. Υποθέτω ότι υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $X: U \to X(U)$ ορθογώνιο με παραμέτρους (u,v) ώστε $R \subseteq X(U)$

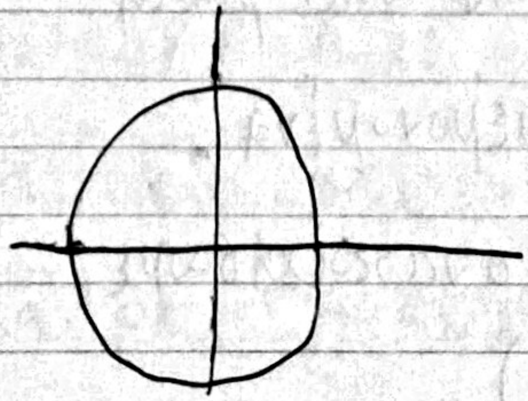
Τότε $\varphi(t) = \measuredangle(X_u, V)\big|_C$. Επειδή η C κλειστή

$\Rightarrow \varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi I, \; I \in Z$

Ο αριθμος I καλείται δεικτης του V στο P_0 και συμβολίζεται με $I(V,P_0)=\dfrac{\varphi(L)-\varphi(0)}{2\pi}$

Για μη ιδιάζοντα σημεία P_0 ορίζουμε

$$I(V,P_0)=0$$



$$V(x,y)=(x,y)$$

$$c(t)=(\cos t,\sin t)$$

$$V(c(t))=(\cos t,\sin t)$$

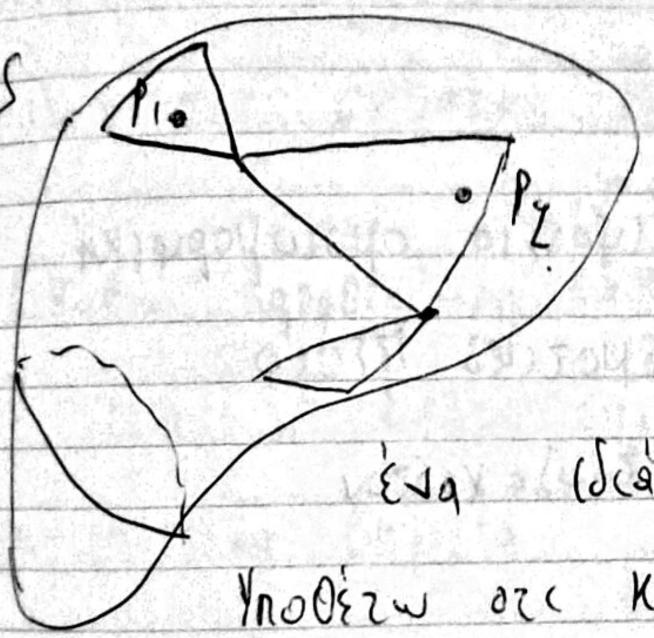
$$=(\cos(\varphi(t)),\sin(\varphi(t)))$$

Οπου $\varphi(t)=t$ Τότε $I(V,0)=\dfrac{\varphi(2\pi)-\varphi(0)}{2\pi}$

$$=\frac{2\pi-0}{2\pi}=1$$

Θεώρημα **Poincare:** Έστω S συμπαγής επιφάνεια και V διανυσματικό πεδίο με μεμονωμένα ιδιάζοντα σημεία τότε $\sum_i I(V,P_i) = X(S)$

Απόδειξη: Έστω $P_1,\dots,P_k$ τα ιδιάζοντα σημεία



Έστω $\mathcal{T}=\{T_1,T_2,\dots,T_k\}$ τριγωνοποίηση ώστε κάθε τρίγωνο να έχει ένα ιδιάζων σημείο στο εσωτερικό.

Υποθέτω ότι κάθε τρίγωνο περιέχεται σε περιοχή ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων του προσανατολισμού. $\iint_{T_i} K\,d\sigma - 2\pi I(V,P_i) = (\varphi_i - \varphi_i)$

$$\Rightarrow \sum_i \iint_{T_i} K\,d\sigma - 2\pi \sum_i I(V,P_i) = 0$$

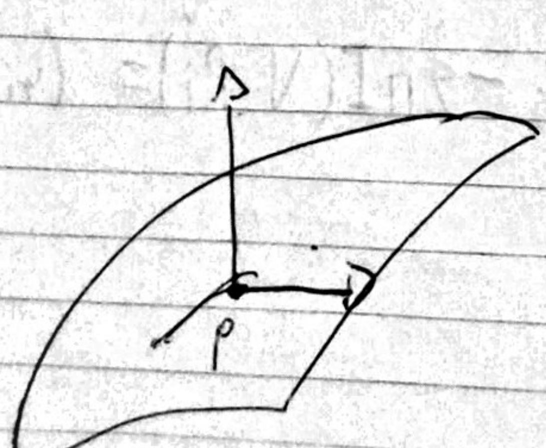
$$\Rightarrow \iint_S K\,d\sigma - 2\pi \sum_i I(V,P_i) = 0 \Rightarrow 2\pi X(S) = 2\pi \sum_i I(V,P_i)$$

$$\Rightarrow \sum_i I(V,P_i) = X(S)$$

<u>Ερωτημα</u>: Υπάρχει διανυσματικό πεδίο στην S^2 το οποίο να μη μηδενίζεται πουθενά; Απάντηση: οχι γιατί τότε θα έπρεπε $\sum_i I(V,P_i) = 0 = X(S^2)$.

Ομως $X(S^2) = 2$.

<u>Θεώρημα</u>: Εστω S επιφάνεια ομοιομορφική με την S^2. Κάθε διανυσματικό πεδίο V της S έχει ένα τουλαχιστον ιδιάζων σημείο.



Οι κύριες διευθύνσεις είναι καλά ορισμένες σε σημεία οπου $k_1 > k_2$

Πόρισμα: Κάθε συμπαγής επιφάνεια χωρίς ομφαλικά και χωρίς ισόπεδα σημεία είναι τοπολογικά τορος

Πορισμα: Εστω S συμπαγής επιφάνεια ομοιομορφική με S2. Τότε υπάρχει ένα τουλαχιστον ομφαλικό ή ισοπεδο σημείο

Εικασία Καραθεοδωρή: Κάθε επιφανεια ομοιομορφική με την S^2 έχει δυο τουλάχιστον ομφαλικά μη-ισόπεδα σημεία